

Srijeda, 11. April, 2018.

**Problem 1.** Dat je jednakokraki trougao  $ABC$  ( $AC = BC$ ) kome je  $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ . Neka je  $M$  središte stranice  $AB$  i  $P$  proizvoljna tačka na krugu opisanom oko trougla  $ABC$ . Neka je  $Q$  tačka koja pripada duži  $CP$ , takva da važi  $QP = 2QC$ . Označimo sa  $N$  tačku presjeka prave koja sadrži tačku  $P$  i normalna je na  $AB$  i prave  $MQ$ . Dokazati da tačka  $N$  pripada nekom fiksnom krugu, ma kako odabrali tačku  $P$ .

**Problem 2.** Posmatrajmo skup  $A = \left\{1 + \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, 3, \dots\right\}$ .

- Dokazati da se svaki prirodan broj  $x$  ( $x \geq 2$ ), može napisati kao proizvod jednog ili više (ne obavezno različitih) elemenata iz  $A$ .
- Za svaki prirodan broj  $x$  ( $x \geq 2$ ), označimo sa  $f(x)$  najmanji prirodan broj takav da se  $x$  može napisati kao proizvod  $f(x)$  (ne obavezno različitih) elemenata iz  $A$ . Dokazati da postoji beskonačno mnogo parova  $(x, y)$  prirodnih brojeva ( $x \geq 2, y \geq 2$ ) za koje je

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Napomena: Parovi  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  su različiti ako je  $x_1 \neq x_2$  ili  $y_1 \neq y_2$ .)

**Problem 3.** Na EGMO učestvuje  $n$  takmičarki. Imenujmo ih sa  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Nakon takmičenja, žiri će postrojiti takmičarke u red (svaka takmičarka, osim prve, gleda u leđa takmičarki ispred nje) ispred restorana i započeti “proces naplate” po sljedećim pravilima:

- Žiri određuje početni raspored takmičarki u redu.
- Svakog minuta žiri će odabrati prirodan broj  $i$  iz skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- Ako takmičarka  $C_i$  ima najmanje  $i$  drugih takmičarki ispred sebe, ona će platiti 1 evro žiriju i pomjeriće se za tačno  $i$  mjesta naprijed (prema početku reda).
- Ako takmičarka  $C_i$  ima manje od  $i$  drugih takmičarki ispred sebe, “proces naplate” se završava i sve takmičarke ulaze u restoran.

- Dokazati da “proces naplate” ne može trajati neograničeno dugo.
- Za svaki prirodan broj  $n$ , odrediti maksimalan broj evra koji žiri može prikupiti.  
(Napomena: Pretpostavlja se da je žiri dovoljno mudar da odabere početni raspored i redosled izvođenja poteza pri naplati, kako bi taj maksimalan broj evra prikupio.)