Language: **Serbian**

Day: **1**

sreda, 11.4.2018.

Zadatak 1. Neka je ABC trougao u kome važi $CA = CB$ i $\angle ACB = 120°$, i neka je M središte stranice AB. Neka je P tačka na kružnici opisanoj oko trougla ABC, i neka je Q tačka na duži CP tako da važi $QP = 2QC$. Dato je da prava kroz tačku P koja je normalna na pravu AB seče pravu MQ u jedinstvenoj tački N.

Dokazati da postoji kružnica takva da joj tačka N pripada za sve moguće pozicije tačke P.

Zadatak 2. Dat je skup

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

(a) Dokazati da se svaki prirodan broj $x \geq 2$ može napisati kao proizvod jednog ili više elemenata skupa A, koji ne moraju biti različiti.

(b) Za svaki prirodan broj $x \geq 2$, neka je $f(x)$ najmanji prirodan broj takav da se x može napisati kao prozivod $f(x)$ elemenata skupa A, koji ne moraju biti različiti.

Dokazati da postoji beskonačno mnogo parova (x, y) prirodnih brojeva za koje važi $x \geq 2$, $y \geq 2$, i

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parovi (x_1, y_1) i (x_2, y_2) su različiti ako i samo ako $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$).

Zadatak 3. Označimo n takmičarki EGMO-a sa $C_1, \ldots, C_n$. Posle takmičenja, one staju u red ispred restorana u skladu sa sledećim pravilima.

- Komisija bira početni redosled takmičarki u redu.
- Svakog minuta Komisija bira prirodan broj i, tako da $1 \leq i \leq n$.
  - Ako se ispred takmičarke C_i nalazi bar i drugih takmičarki, ona plaća jedan evro Komisiji i pomera se prema početku reda za tačno i pozicija.
  - Ako se ispred takmičarke C_i nalazi manje od i drugih takmičarki, restoran se otvara i proces se završava.

(a) Dokazati da ovaj proces ne može trajati beskonačno, bez obzira na izbore Komisije.

(b) Odrediti za svako n najveći broj evra koje Komisija može da prikupi prefrigano birajući početni raspored i izabrane brojeve.