

Среда, 11 апреля 2018 г.

**Задача 1.** Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $CA = CB$  и  $\angle ACB = 120^\circ$ ; а точка  $M$  — середина стороны  $AB$ . Пусть  $P$  — произвольная точка, лежащая на описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $Q$  — точка на отрезке  $CP$  такая, что  $QP = 2QC$ . Прямая, проходящая через точку  $P$  перпендикулярно  $AB$ , пересекает прямую  $MQ$  в точке  $N$ .

Докажите, что существует некоторая окружность такая, что точка  $N$  лежит на этой окружности вне зависимости от выбора точки  $P$ .

**Задача 2.** Рассмотрим множество

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Докажите, что любое целое число  $x \geq 2$  может быть получено как произведение одного или нескольких не обязательно различных элементов множества  $A$ .
- (b) Для каждого целого числа  $x \geq 2$  через  $f(x)$  обозначим наименьшее целое число такое, что  $x$  может быть получено как произведение  $f(x)$  не обязательно различных элементов множества  $A$ .

Докажите, что существует бесконечно много пар  $(x, y)$  целых чисел  $x \geq 2$  и  $y \geq 2$  таких, что

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Пары  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  считаются различными, если  $x_1 \neq x_2$  или  $y_1 \neq y_2$ ).

**Задача 3.** Каждой из  $n$  участниц ЕГМО присвоен один из номеров  $C_1, \dots, C_n$ . После олимпиады они выстраиваются в очередь перед рестораном согласно следующим правилам:

- Жюри выбирает начальную расстановку участниц в очереди.
- Каждую минуту Жюри выбирает некоторое число  $i$  из промежутка  $1 \leq i \leq n$ .
  - Если перед участницей  $C_i$  стоят по крайней мере  $i$  других участниц, она платит Жюри один евро и перемещается в очереди вперёд ровно на  $i$  позиций.
  - Если перед участницей  $C_i$  стоит менее, чем  $i$  других участниц, ресторан открывается и процесс заканчивается.

- (a) Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго вне зависимости от действий Жюри.
- (b) Для каждого  $n$  найдите наибольшее количество евро, которое Жюри может получить, выбрав начальную расстановку участниц и последовательность ходов.