

Miercuri, 11 aprilie, 2018

**Problema 1.** Fie  $ABC$  un triunghi cu  $CA = CB$  și  $\angle ACB = 120^\circ$  și fie  $M$  mijlocul segmentului  $AB$ . Fie  $P$  un punct variabil pe cercul circumscris triunghiului  $ABC$  și fie  $Q$  punctul de pe segmentul  $CP$  pentru care  $QP = 2QC$ . Perpendiculara pe  $AB$ , dusă prin  $P$ , intersectează dreapta  $MQ$  într-un unic punct  $N$ .

Demonstrați că există un cerc fix astfel încât  $N$  este situat pe acest cerc, pentru toate pozițiile posibile ale lui  $P$ .

**Problema 2.** Considerăm mulțimea

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Demonstrați că fiecare număr întreg  $x \geq 2$  poate fi scris ca produsul a unuia sau mai multe elemente ale lui  $A$ , nu neapărat diferite.
- (b) Pentru fiecare număr întreg  $x \geq 2$ , notăm cu  $f(x)$  cel mai mic număr întreg pentru care  $x$  poate fi scris ca produs de  $f(x)$  elemente ale lui  $A$ , nu neapărat diferite.

Demonstrați că există o infinitate de perechi  $(x, y)$  de numere întregi, cu  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$  și

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Perechile  $(x_1, y_1)$  și  $(x_2, y_2)$  sunt diferite dacă  $x_1 \neq x_2$  sau  $y_1 \neq y_2$ .)

**Problema 3.** Cele  $n$  concurente la EGMO sunt identificate cu numele  $C_1, \dots, C_n$ . După concurs ele sunt așezate la rând la ușa restaurantului, una câte una, după următoarele reguli.

- Juriul alege ordinea inițială în rând a concurenților.
- În fiecare minut juriul alege un întreg  $i$  cu  $1 \leq i \leq n$ .
  - În cazul în care concurenta  $C_i$  are cel puțin  $i$  alte concurente înaintea ei, ea plătește un euro juriului și avansează în rând cu exact  $i$  poziții.
  - În cazul în care concurenta  $C_i$  are mai puțin de  $i$  alte concurente înaintea ei, restaurantul se deschide și procesul se termină.

- (a) Demonstrați că procesul nu poate continua la nesfârșit, indiferent de alegerile juriului.
- (b) Pentru fiecare  $n$ , determinați numărul maxim de euro pe care îl poate obține juriul, alegând în mod adecvat ordinea inițială în rând și succesiunea de mișcări ulterioare.