Language: **Portuguese**

Day: **1**

Quarta-feira, 11 de abril de 2018

Problema 1. Seja ABC um triângulo com $CA = CB$ e $\angle ACB = 120°$, e seja M o ponto médio de AB. Seja P um ponto variável no circuncírculo de ABC, e seja Q o ponto no segmento CP tal que $QP = 2QC$. Sabe-se que a reta que passa por P e é perpendicular à reta AB intersecta a reta MQ em um único ponto N.

Prove que existe uma circunferência fixa tal que N pertence a essa circunferência para qualquer posição de P.

Problema 2. Considere o conjunto

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots\right\}.$$

(a) Prove que todo inteiro $x \geq 2$ pode ser escrito como o produto de um ou mais elementos de A, não necessariamente distintos.

(b) Para todo inteiro $x \geq 2$, seja $f(x)$ o menor inteiro tal que x pode ser escrito como o produto de $f(x)$ elementos de A, não necessariamente distintos.

Prove que existem infinitos pares (x, y) de inteiros com $x \geq 2$, $y \geq 2$, e

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são distintos se $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$).

Problema 3. As n competidoras de uma EGMO são chamadas de $C_1, \dots, C_n$. Depois da competição, elas formam uma fila na frente do restaurante de acordo com as seguintes regras:

- O Juri escolhe a ordem inicial das competidoras na fila.
- A cada minuto, o Juri escolhe um inteiro i tal que $1 \leq i \leq n$.
  - Se a competidora C_i tem pelo menos i outras competidoras na sua frente, ela paga 1 euro para o Juri e anda exatamente i posições para frente.
  - Se a competidora C_i tem menos de i outras competidoras na sua frente, o restaurante abre e esse processo se encerra.

(a) Prove que esse processo não pode continuar indefinidamente, independentemente das escolhas do Juri.

(b) Determine para cada n a maior quantidade de euros que o Juri pode arrecadar das competidoras escolhendo de maneira esperta a ordem inicial e a sequência de escolhas dos inteiros i.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos