

Środa, 11 kwietnia 2018 r.

**Zadanie 1.** Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym spełnione są równości  $CA = CB$  oraz  $\angle ACB = 120^\circ$ . Niech  $M$  będzie środkiem boku  $AB$ . Niech  $P$  będzie punktem na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ . Niech  $Q$  będzie takim punktem na odcinku  $CP$ , że  $QP = 2QC$ . Wiadomo, że prosta przechodząca przez punkt  $P$  prostopadła do  $AB$  przecina prostą  $MQ$  w punkcie  $N$ .

Dowieść, że istnieje ustalony okrąg o tej własności, że niezależnie od położenia punktu  $P$  punkt  $N$  leży na tym okręgu.

**Zadanie 2.** Rozważmy zbiór

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Udowodnić, że każda liczba całkowita  $x \geq 2$  może być zapisana w postaci iloczynu jednego lub więcej elementów zbioru  $A$  (niekoniecznie różnych).
- (b) Dla każdej liczby całkowitej  $x \geq 2$  niech  $f(x)$  oznacza najmniejszą liczbę całkowitą, dla której  $x$  może być zapisana w postaci iloczynu  $f(x)$  elementów zbioru  $A$  (niekoniecznie różnych).

Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich par liczb całkowitych  $(x, y)$ , że  $x \geq 2, y \geq 2$  oraz

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Pary  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  uznajemy za różne jeśli  $x_1 \neq x_2$  lub  $y_1 \neq y_2$ .)

**Zadanie 3.**  $n$  zawodniczek EGMO nazywa się  $C_1, \dots, C_n$ . Po zawodach ustawiają się one w kolejce do restauracji zgodnie z poniższymi regułami.

- Jury wybiera początkową kolejność zawodniczek w kolejce.
- Co minutę Jury wybiera liczbę całkowitą  $i$ , przy czym  $1 \leq i \leq n$ .
  - Jeżeli przed zawodniczką  $C_i$  stoi co najmniej  $i$  innych zawodniczek, to płaci ona 1 euro Jury i przesuwa się w kolejce do przodu o dokładnie  $i$  miejsc.
  - Jeżeli przed zawodniczką  $C_i$  stoi mniej niż  $i$  innych zawodniczek, to restauracja otwiera się i procedura się kończy.

- (a) Wykazać, że powyższa procedura zakończy się niezależnie od wyborów podejmowanych przez Jury.
- (b) Dla każdego  $n$  wyznaczyć największą kwotę, którą Jury może otrzymać poprzez odpowiedni wybór początkowej kolejności zawodniczek oraz odpowiedni dobór ruchów.