Language: **Norwegian**

Day: **1**

Onsdag 11. april 2018

Oppgave 1. La ABC være en trekant med $CA = CB$ og $\angle ACB = 120°$, og la M være midtpunktet på linjestykket AB. La P være et punkt på omsirkelen til ABC, og la Q være punktet på linjestykket CP som oppfyller $QP = 2QC$. Det er gitt at normalen fra P til AB skjærer linjen MQ i nøyaktig et punkt N.

Vis at det finnes en sirkel som ikke avhenger av punktet P's plassering, slik at uansett hvordan man velger punktet P vil N ligge på denne sirkelen.

Oppgave 2. Betrakt mengden

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) Vis at alle heltall $x \geq 2$ kan skrives som produktet av en eller flere elementer fra A, der tallene i produktet ikke nødvendigvis trenger å være forskjellige.

(b) For alle heltall $x \geq 2$, la $f(x)$ være det minste tallet slik at x kan skrives som et produkt av $f(x)$ elementer fra A, der tallene i produktet ikke nødvendigvis trenger å være forskjellige.

Vis at det finnes uendelig mange par (x, y) av heltall med $x \geq 2$, $y \geq 2$ og

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(To par (x_1, y_1) og (x_2, y_2) regnes som forskjellige dersom $x_1 \neq x_2$ eller $y_1 \neq y_2$.)

Oppgave 3. De n deltakerne på EGMO kalles $C_1, \ldots, C_n$. Etter konkurransen stiller deltakerne seg i kø foran restauranten etter følgende regler.

- Juryen velger startrekkefølgen til deltakerne.
- Hvert minutt velger juryen et heltall i med $1 \leq i \leq n$.
  - Hvis deltaker C_i har minst i deltakere foran seg i køen, så betaler hun én euro til juryen og flytter seg nøyaktig i plasser fremover i køen.
  - Hvis deltaker C_i har mindre enn i deltakere foran seg i køen, så åpner restauranten og prosessen tar slutt.

(a) Vis at denne prosessen alltid må ta slutt, uansett hvilke valg juryen tar.

(b) For hver n, bestem det største antallet euro juryen kan klare å samle sammen.