

Среда, 11 април 2018 година

Проблем 1. Нека ABC е триаголник, таков што $\overline{CA} = \overline{CB}$ и $\angle ACB = 120^\circ$ и нека M е средина на страната AB . Нека P е произволна променлива точка, која лежи на опишаната кружница на триаголникот ABC , и нека Q е точка на отсечката CP , таква што $\overline{QP} = 2\overline{QC}$. Дадено е дека правата што минува низ точката P и е нормална на AB , ја сече правата MQ во единствена точка N .

Докажи дека постои фиксирана, точно определена кружница, таква што точката N лежи на оваа кружница за сите можни положби на точката P .

Проблем 2. Дадено е множеството

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

а) Докажи дека секој цел број $x \geq 2$ може да се запише како производ од еден или повеќе елементи од множеството A , кои што не мора да се различни.

б) За секој цел број $x \geq 2$, нека $f(x)$ го претставува најмалиот број, таков што x може да биде запишан со $f(x)$ број на елементи од множеството A , кои што не мора да се различни. Докажи дека постојат бесконечно многу парови (x, y) од цели броеви такви што $x \geq 2, y \geq 2$ и

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Паровите (x_1, y_1) и (x_2, y_2) се различни, ако и само ако $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$.)

Проблем 3. Натпреварувачки на ЕГМО, n на број, се означени со ознаките C_1, \dots, C_n . По натпреварот тие се наредиле во редица една позади друга, пред ресторанот според следниве правила.

- Жирито го одбира првичниот распоред на натпреварувачките во редицата.
- Секоја минута, Жирито избира цел број i , таков што $1 \leq i \leq n$. При тоа,
 - Ако натпреварувачката C_i има најмалку i други натпреварувачки пред себе, тогаш таа плаќа едно евро на Жирито и се преместува напред во редицата за точно i позиции.
 - Ако натпреварувачката C_i има помалку од i други натпреварувачки пред себе, тогаш ресторанот се отвора и овој процес завршува.

а) Докажи дека процесот не може да продолжува бесконечно, независно од изборот на Жирито.

б) За секој n определи го најголемиот број на евра што би го собрало Жирито, со итар и префриган избор на почетниот редослед и на низата од потези.