

2018 m. balandžio 11 d., trečiadienis

1 uždavinys. Trikampis ABC tenkina sąlygas $CA = CB$ ir $\angle ACB = 120^\circ$. Taškas M dalija kraštinę AB pusiau. Pasirinkime trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo kurį nors tašką P . Tarkime, kad nubrėžta atkarpa PC ir joje pažymėtas toks taškas Q , kad $QP = 2QC$. Tarkime, kad tiesė, einanti per P ir statmena tiesei AB , bei tiesė MQ turi vienintelį bendrą tašką N .

Įrodykite, kad egzistuoja toks fiksuotas apskritimas, kuriam taškas N priklauso, esant bet kokiam galimam taško P parinkimui.

2 uždavinys. Nagrinėkime aibę

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Įrodykite, kad kiekvienas natūralusis skaičius $x \geq 2$ lygus vieno ar kelių aibės A (nebūtinai skirtingų) elementų sandaugai.
- (b) Kiekvienam natūraliajam skaičiui $x \geq 2$ skaičius $f(x)$ žymi, kiek mažiausiai aibės A (nebūtinai skirtingų) elementų reikia užrašyti, kad jų sandauga būtų lygi x .

Įrodykite, kad yra be galo daug tokių natūraliųjų skaičių porų (x, y) , kad $x \geq 2$, $y \geq 2$ ir

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Poros (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) skirtingos tada ir tik tada, kai $x_1 \neq x_2$ arba $y_1 \neq y_2$.)

3 uždavinys. Merginų matematikos olimpiadoje buvo n dalyvių, jos pažymėtos C_1, \dots, C_n . Kad po varžybų patektų į restoraną, jos turi stoti į eilę prie jo uždarytų durų pagal tokias taisykles.

- Pradinę dalyvių tvarką eilėje nustato vertinimo Komisija.
- Kas minutę Komisija paskelbia natūralųjį skaičių i , tenkinantį nelygybes $1 \leq i \leq n$.
 - Jei prieš dalyvę C_i eilės priekyje yra bent i kitų dalyvių, tai ji sumoka Komisijai vieną eurą ir pajuda eilėje į priekį, aplenkdamą lygiai i dalyvių.
 - Jei prieš dalyvę C_i eilės priekyje yra mažiau nei i kitų dalyvių, tai restoranas atidaromas ir visas procesas baigiasi.

(a) Įrodykite, kad procesas negali tęstis be galo, kad ir kokius sprendimus beprijimtų Komisija.

(b) Kiekvienam natūraliajam n nustatykite, kiek daugiausiai eurų gali uždirbti Komisija, jei pradinę dalyvių tvarką bei tolimesnius veiksmus rinksis taip, kaip Komisijai naudingiausia.