

Trešdien, 2018. gada 11. aprīlī.

1. uzdevums. Trijstūrī ABC malas $CA = CB$, un $\angle ACB = 120^\circ$. Punkts M ir malas AB viduspunkts. Punkts P ir patvaļīgs punkts uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas. Punkts Q ir nogriežņa CP punkts tāds, ka $QP = 2QC$. Ir zināms, ka taisne, kas novilkta caur P perpendikulāri AB , krusto taisni MQ vienā unikālā punktā N .

Pierādīt, ka eksistē fiksēta riņķa līnija tāda, ka N atrodas uz šīs riņķa līnijas neatkarīgi no izvēlēta punkta P atrašanās vietas.

2. uzdevums. Dota kopa

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Pierādīt, ka katru veselu skaitli $x \geq 2$, var izteikt kā viena vai vairāku kopas A skaitļu (ne obligāti dažādu) reizinājumu. (Reizinājums var sastāvēt arī no viena kopas elementa.)
- (b) Katram vesalam skaitlim $x \geq 2$, ar $f(x)$ apzīmēsim minimālo naturālo skaitli, tādu, ka x var tikt izteikts, kā $f(x)$ kopas A elementu (ne obligāti dažādu) reizinājums.

Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz dažādi veselu skaitļu pāri (x, y) tādi, ka $x \geq 2, y \geq 2$, un

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Pāri (x_1, y_1) un (x_2, y_2) ir dažādi, ja vismaz viena no nevienādībām: $x_1 \neq x_2$ vai arī $y_1 \neq y_2$, ir patiesa).

3. uzdevums. Katrai no n EGMO dalībniecēm ir piešķirts identifikātors ar nemainīgu indeksu C_1, \dots, C_n . Pēc sacensībām dalībnieces tiek sakārtotas pie ieejas restorānā saskaņā ar šādiem noteikumiem:

- Žūrija izvēlās sākonējo dalībnieču sakārtojumu vienā rindā;
- Katru minūti Žūrija izvēlas naturālu skaitli $i, 1 \leq i \leq n$.
 - Ja pirms dalībnieces C_i ir vismaz i citas dalībnieces, tad viņa maksā vienu eiro Žūrijai (labdarībai) un pārvietojas rindā tieši i pozīcijas uz priekšu.
 - Ja pirms dalībnieces C_i atrodas mazāk kā i citas dalībnieces, tad kārtošanas process beidzas un restorāns tiek atvērts.

- (a) Pierādīt, ka kārtošanas process nevar ilgt bezgalīgi ilgi, neatkarīgi no Žūrijas izvēlēm;
- (b) Katram n noteikt maksimālo eiro daudzumu, kuru Žūrijai iespējams iegūt, visefektīvākajā veidā izvēloties sākotnējo sakārtojumu un izvēloties visefektīvāko naturālo skaitļu secību.