Language: **Japanese**

Day: **1**

2018 年 4 月 11 日水曜日

問題 1. 三角形 ABC は $CA = CB$, $\angle ACB = 120^\circ$ をみたすとし, 辺 AB の中点を M とおく. P を三角形 ABC の外接円上を動く点とし, Q を $QP = 2QC$ をみたす線分 CP 上の点とする. P を通り AB と垂直な直線が直線 MQ と唯一の点 N で交わるとする.

このときある円が存在し, どのように P を動かしても, N がその円上に存在することを示せ.

問題 2. 次の集合を考える：

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \;\middle|\; k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) 各 2 以上の整数 x は, 必ずしも異なるとは限らない 1 個以上の A の元の積で表せることを示せ.

(b) 各 2 以上の整数 x について, x を必ずしも異なるとは限らない 1 個以上の A の元の積で表すとき, 必要な元の個数の最小値を $f(x)$ とおく.

整数の組 (x, y) であり, $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, および

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

をみたすものが無数に存在することを示せ.

(ただし, (x_1, y_1) と (x_2, y_2) は, $x_1 \neq y_1$ または $x_2 \neq y_2$ のとき異なる組と考える.)

問題 3. $C_1, \ldots, C_n$ を n 人の EGMO の選手とする. コンテストの後, 彼女たちは次のルールに基づいてレストランの前に一列に並ぶ：

- 料理長は最初の選手の並び順を指定する.
- 料理長は 1 分おきに $1 \leqq i \leqq n$ をみたす整数 i を選ぶ.
  - 選手 C_i よりも前に i 人以上の選手がいるとき, 選手 C_i は 1 ユーロを料理長に支払い, 直前の i 人を抜かして割り込む.
  - 選手 C_i よりも前にいる選手が i 人未満であるとき, レストランが開きこの手順が終了する.

(a) 料理長がいかなる選択をしても, この手順が無限回行われることはないことを示せ.

(b) 各 n について, 料理長が得られる最大の金額を求めよ.

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点