Language: **Italian**

Day: **1**

Mercoledì 11 aprile 2018

Problema 1. Sia ABC un triangolo con $CA = CB$ e $\angle ACB = 120^\circ$, e sia M il punto medio di AB. Sia P un punto che varia sulla circonferenza circoscritta ad ABC, e sia Q il punto sul segmento CP tale che $QP = 2QC$. Si supponga che la retta passante per P e perpendicolare ad AB intersechi la retta MQ in un unico punto N.

Dimostrare che esiste una circonferenza fissata tale che N giace su questa circonferenza per tutte le possibili scelte di P.

Problema 2. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots\right\}.$$

(a) Dimostrare che ogni intero $x \geq 2$ può essere scritto come prodotto di uno o più elementi di A, non necessariamente distinti.

(b) Per ogni intero $x \geq 2$, sia $f(x)$ il minimo intero tale che x può essere scritto come prodotto di $f(x)$ elementi di A, non necessariamente distinti.

Dimostrare che esistono infinite coppie di interi (x, y) con $x \geq 2$ e $y \geq 2$ tali che

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Le coppie (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono diverse se e solo se $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$.)

Problema 3. Le n concorrenti di una EGMO si chiamano $C_1, \dots, C_n$. Dopo la gara, si mettono in coda davanti al ristorante rispettando le seguenti regole.

- La Giuria decide l'ordine iniziale delle concorrenti nella coda.
- Ogni minuto, la Giuria sceglie un intero i con $1 \leq i \leq n$.
  - Se la concorrente C_i ha almeno altre i concorrenti di fronte a lei, paga un euro alla Giuria e si sposta in avanti nella coda di esattamente i posizioni.
  - Se la concorrente C_i ha meno di altre i concorrenti di fronte a lei, il ristorante apre e il processo termina.

(a) Dimostrare che il processo non può andare avanti all'infinito, indipendentemente dalle scelte della Giuria.

(b) Determinare per ogni n il massimo numero di euro che la Giuria può ottenere scegliendo astutamente l'ordine iniziale e la sequenza di mosse.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti