

יום רביעי, 11 באפריל, 2018

שאלה 1. יהא ABC משולש בו $CA = CB$ וכן $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, ותהא M אמצע AB . תהא P נקודה משתנה על המעגל החוסם של ABC , ותהא Q הנקודה על הקטע CP עבורה מתקיים $QP = 2QC$. נתון כי הישר שעובר דרך P ומאונך ל- AB נחתך עם הישר MQ בנקודה היחידה N . הוכיחי כי קיים מעגל קבוע אשר הנקודה N נמצאת עליו לכל המיקומים האפשריים של P .

שאלה 2. נתבונן בקבוצה

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

(א) הוכיחי כי כל שלם $x \geq 2$ ניתן להצגה כמכפלה של אחד או יותר מאיברי A , שאינם בהכרח שונים זה מזה.

(ב) לכל שלם $x \geq 2$, נסמן ב- $f(x)$ את השלם המינימלי עבורו ניתן להציג את x כמכפלה של $f(x)$ מאיברי A , שאינם בהכרח שונים זה מזה.

הוכיחי כי קיימים אינסוף זוגות (x, y) של שלמים עם $x \geq 2, y \geq 2$ וכן

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

(הזוגות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) נחשבים שונים אם $x_1 \neq x_2$ או $y_1 \neq y_2$).

שאלה 3. ב-EGMO משתתפות n מתחרות, ששמותיהן C_1, \dots, C_n . לאחר התחרות הן ממתינות בתור בכניסה למסעדה, אחת מאחורי השנייה, בהתאם לכללים הבאים:

- ועד מנהיגי הנבחרות בוחר את הסדר ההתחלתי של המתחרות בתור.
 - בכל דקה, הועד בוחר מספר שלם i עם $1 \leq i \leq n$.
 - אם המתחרה C_i עומדת מאחורי לפחות i מתחרות אחרות, היא משלמת לוועד אירו בודד ומתקדמת בתור בדיוק ב- i מקומות.
 - אם המתחרה C_i עומדת מאחורי פחות מ- i מתחרות אחרות, דלתות המסעדה נפתחות והתהליך מסתיים.
- (א) הוכיחי כי התהליך לא יכול להמשך לנצח, ללא תלות בבחירות הועד.
- (ב) מצאי לכל n את כמות האירו המקסימלית שהועד יכול לגבות באמצעות בחירה ערמומית של הסדר ההתחלתי ושל סדרת המהלכים.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות