

Τετάρτη, 11 Απριλίου, 2018

Πρόβλημα 1. Έστω ABC ένα τρίγωνο με $CA = CB$ και $\angle ACB = 120^\circ$ και έστω M το μέσον της πλευράς AB . Έστω P τυχαίο σημείο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC και Q το σημείο στο τμήμα CP για το οποίο $QP = 2QC$. Η ευθεία από το P που είναι κάθετη στο AB τέμνει την ευθεία MQ σε ένα μοναδικό σημείο N .

Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας σταθερός κύκλος έτσι ώστε το N να ανήκει στον κύκλο αυτό για όλες τις δυνατές θέσεις του P .

Πρόβλημα 2. Θεωρήστε το σύνολο

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι κάθε ακέραιος $x \geq 2$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός ή περισσότερων στοιχείων του A , τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά.

(β) Για κάθε ακέραιο $x \geq 2$, συμβολίζουμε με $f(x)$ τον ελάχιστο ακέραιο έτσι ώστε το x να μπορεί να γράφεται ως γινόμενο $f(x)$ σε πλήθος στοιχείων του A , τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη (x, y) ακεραίων με $x \geq 2, y \geq 2$ και

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Τα ζεύγη (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι διαφορετικά όταν $x_1 \neq x_2$ ή $y_1 \neq y_2$.)

Πρόβλημα 3. Οι n διαγωνιζόμενες σε μία EGMO, ονομάζονται C_1, C_2, \dots, C_n . Μετά το διαγωνισμό μπαίνουν στην ουρά η μια πίσω από την άλλη, έξω από το εστιατόριο σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες.

- Το συμβούλιο των Κριτών επιλέγει μια αρχική διάταξη των διαγωνιζομένων στην ουρά.
- Κάθε λεπτό το συμβούλιο επιλέγει έναν ακέραιο i με $1 \leq i \leq n$.
 - Αν η διαγωνιζόμενη C_i έχει μπροστά της τουλάχιστον i σε πλήθος άλλες διαγωνιζόμενες, τότε πληρώνει ένα Ευρώ στο συμβούλιο των Κριτών και μετακινείται προς τα εμπρός στην ουρά ακριβώς i θέσεις.
 - Αν η διαγωνιζόμενη C_i έχει μπροστά της λιγότερες από i σε πλήθος άλλες διαγωνιζόμενες, τότε το εστιατόριο ανοίγει και η διαδικασία τερματίζεται.

(α) Αποδείξτε πως, ανεξαρτήτως των επιλογών του Συμβουλίου των Κριτών, η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον.

(β) Για κάθε n , προσδιορίστε το μέγιστο ποσό σε Ευρώ που μπορεί να εισπράξει το Συμβούλιο των Κριτών, μετά από κατάλληλη επιλογή της αρχικής διάταξης στην ουρά και της ακολουθίας των κινήσεων (δηλαδή τις επιλογές των ακεραίων i).

Language: Greek

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες