

Mittwoch, 11. April 2018

Aufgabe 1. Sei ABC ein Dreieck mit $CA = CB$ und $\angle ACB = 120^\circ$, und sei M der Mittelpunkt von AB . Sei P ein variabler Punkt auf dem Umkreis von ABC , und sei Q derjenige Punkt auf der Strecke CP , für den $QP = 2QC$ gilt. Die Senkrechte auf AB durch P schneide die Gerade MQ in einem eindeutigen Punkt N .

Zeige, dass ein fester Kreis existiert, sodass N für alle möglichen Positionen von P auf diesem Kreis liegt.

Aufgabe 2. Betrachte die Menge

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Zeige, dass jede natürliche Zahl $x \geq 2$ als Produkt von einem oder mehreren Elementen aus A , die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen, geschrieben werden kann.
- (b) Für jede natürliche Zahl $x \geq 2$ bezeichne $f(x)$ die kleinste natürliche Zahl, sodass x als Produkt von $f(x)$ Elementen aus A , die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen, geschrieben werden kann.

Zeige, dass unendlich viele verschiedene Paare natürlicher Zahlen (x, y) mit $x \geq 2, y \geq 2$ und

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

existieren.

(Zwei Paare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind verschieden, wenn $x_1 \neq x_2$ oder $y_1 \neq y_2$.)

Aufgabe 3. Die n Teilnehmerinnen einer EGMO heißen (heissen) C_1, \dots, C_n . Nach dem Wettbewerb stellen sie sich nach den folgenden Regeln vor dem Restaurant in einer Schlange an:

- Die Jury bestimmt die anfängliche Reihenfolge der Teilnehmerinnen in der Schlange.
- Jede Minute wählt die Jury eine natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq n$.
 - Falls Teilnehmerin C_i mindestens i andere Teilnehmerinnen vor sich hat, zahlt sie einen Euro an die Jury und bewegt sich in der Schlange um genau i Plätze nach vorne.
 - Falls dagegen Teilnehmerin C_i weniger als i andere Teilnehmerinnen vor sich hat, öffnet das Restaurant und der Prozess endet.

- (a) Zeige, dass der Prozess nicht unendlich lange dauern kann, unabhängig von den Entscheidungen der Jury.
- (b) Bestimme für jedes n die maximale Anzahl Euros, die die Jury durch geschicktes Wählen der anfänglichen Reihenfolge und der Abfolge der Zahlen kassieren kann.