

ოთხშაბათი, 11 აპრილი, 2018

**ამოცანა N1.**  $ABC$  სამკუთხედში  $CA = CB$  და  $\angle ACB = 120^\circ$ .  $M$  არის  $AB$  გვერდის შუაწერტილი. აარჩიეს ნებისმიერი  $P$  წერტილი, რომელიც მდებარეობს  $ABC$  სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე, ხოლო  $Q$  წერტილი  $CP$  მონაკვეთზე ისე, რომ  $QP = 2QC$ . წრფე, რომელიც გადის  $P$  წერტილზე და მართობულია  $AB$  წრფის, კვეთს  $MQ$  წრფეს  $N$  წერტილზე. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ფიქსირებული წრეწირი რომელზეც აუცილებლად მდებარეობს წერტილი  $N$  იმის მიუხედავად თუ რომელ  $P$  წერტილს აარჩევდნენ თავდაპირველად.

**ამოცანა N2.** მოცემულია, რიცხვითი სიმრავლე  $A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots\right\}$

ა) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი მთელი  $x \geq 2$  რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს როგორც  $A$  სიმრავლის ერთი ან რამდენიმე, არა აუცილებლად განსხვავებული წევრის ნამრავლი.

ბ) ნებისმიერი მთელი  $x \geq 2$  რიცხვისთვის,  $f(x)$  აღნიშნავდეს იმ უმცირეს ნატურალურ რიცხვს, ისე რომ  $x$  რიცხვის წარმოდგენა შეიძლებოდეს როგორც  $A$  სიმრავლის  $f(x)$  ცალი, არა აუცილებლად განსხვავებული ელემენტის ნამრავლი.

დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მთელ რიცხვთა უამრავი  $(x; y)$  წყვილი, ისე რომ  $x \geq 2$ ;  $y \geq 2$  და სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:  $f(xy) < f(x) + f(y)$ .

შენიშვნა: წყვილები,  $(x_1; y_1)$  და  $(x_2; y_2)$  განსხვავებულია თუ  $x_1 \neq x_2$  ან  $y_1 \neq y_2$ .

**ამოცანა N3.**  $EGMO$  ოლიმპიადის  $n$  ცალი მონაწილის სახელებია  $C_1, \dots, C_n$ . ოლიმპიადის შემდეგ ისინი ერთ რიგად განლაგდნენ რესტორნის შესასვლელთან, ისე რომ:

■ ჟიური ირჩევს რიგში მათი განლაგების თანმიმდევრობას.

■ ყოველ ერთ წუთში, ჟიური ირჩევს მთელ  $i$ , რიცხვს ისე რომ  $1 \leq i \leq n$ . ამასთან:

--- თუ, რიგში  $C_i$  მონაწილის წინ სულ მცირე  $i$  ცალი მონაწილე აღმოჩნდა მაშინ იგი ჟიურის უხდის ერთ ევროს და რიგში ზუსტად  $i$  ადგილით წინ ინაცვლებს.

--- თუ, რიგში  $C_i$  მონაწილის წინ  $i$ -ზე ნაკლები მონაწილე აღმოჩნდა, მაშინ რესტორანი იღება და ეს პროცესი სრულდება.

ა) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ შემთხვევაში პროცესი აუცილებლად დასრულდება.

ბ) ყოველი  $n$ -თვის განსაზღვრეთ, რა მაქსიმალური რაოდენობის ევრო შეუძლია შეაგროვოს ჟიური, თუ ცნობილია, რომ მას უფლება აქვს მისთვის მოხერხებულად აარჩიოს მონაწილეთა საწყისი განლაგება და რიცხვიც ყოველ ახალ ეტაპზე.

Language: Georgian

სამუშაო დრო: 4 სთ 30 წთ  
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით