

Mercredi 11 avril 2018

Problème 1. Soit ABC un triangle tel que $CA = CB$ et $\widehat{ACB} = 120^\circ$ et soit M le milieu du segment $[AB]$. Soit P un point variable sur le cercle circonscrit à ABC et soit Q le point du segment $[CP]$ tel que $QP = 2QC$. La perpendiculaire à la droite AB passant par P coupe la droite MQ en un unique point N .

Montrer qu'il existe un cercle fixé auquel appartient le point N quelle que soit la position de P .

Problème 2. On considère l'ensemble

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \text{ tel que } k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Montrer que tout entier $x \geq 2$ peut s'écrire comme le produit d'un ou de plusieurs éléments de A non nécessairement distincts.
- (b) Pour tout entier $x \geq 2$, soit $f(x)$ le plus petit entier tel que x s'écrive comme produit de $f(x)$ éléments de A non nécessairement distincts.
- Prouver qu'il existe une infinité de paires (x, y) d'entiers tels que $x \geq 2$, $y \geq 2$ et

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Les paires (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont différentes si $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$.)

Problème 3. Les n participantes d'une EGMO se nomment C_1, \dots, C_n . Après la compétition elles font la queue devant le restaurant selon les règles suivantes :

- ◇ Le jury choisit l'ordre initial des participantes dans la queue.
- ◇ Toutes les minutes, le jury choisit un entier i tel que $1 \leq i \leq n$.
 - S'il y a au moins i autres participantes devant C_i , elle paie un euro au jury et avance d'exactly i places dans la queue.
 - S'il y a strictement moins de i autres participantes devant C_i , le restaurant ouvre ses portes et le processus s'achève.

- (a) Démontrer que le processus ne peut pas durer indéfiniment, quels que soient les choix faits par le jury.
- (b) Pour chaque n , déterminer le nombre maximal d'euros que le jury peut récolter en choisissant astucieusement l'ordre initial et la suite des déplacements.