

Keskiviikkona 11.4.2018

**Tehtävä 1.** Olkoon  $ABC$  kolmio, jossa  $CA = CB$  ja  $\angle ACB = 120^\circ$ , ja olkoon  $M$  janan  $AB$  keskipiste. Olkoon piste  $P$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretyllä ympyrällä, ja olkoon  $Q$  sellainen piste janalla  $CP$  että  $QP = 2QC$ . Piste  $P$  kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa  $AB$  vasten leikkaa suoran  $MQ$  yksikäsitteisessä pisteessä  $N$ .

Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, jolla piste  $N$  on aina riippumatta pisteen  $P$  sijainnista.

**Tehtävä 2.** Tarkastellaan joukkoa

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Osoita, että jokainen kokonaisluku  $x \geq 2$  voidaan esittää joukon  $A$  yhden tai useamman alkion tulona, missä näiden alkioden ei välttämättä tarvitse olla keskenään erisuuria.
- (b) Kun  $x \geq 2$  kokonaisluku, olkoon  $f(x)$  pienin sellainen kokonaisluku, että  $x$  voidaan kirjoittaa joukon  $A$  alkioden tulona niin, että tulontekijöiden määrä on  $f(x)$ , ja tulontekijät eivät välttämättä ole keskenään erisuuria.

Osoita, että on olemassa äärettömän monta kokonaislukuparia  $(x, y)$ , joilla  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$ , ja

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parit  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  ovat erisuuria, jos ja vain jos  $x_1 \neq x_2$  tai  $y_1 \neq y_2$ .)

**Tehtävä 3.** Olkoot  $C_1, \dots, C_n$  EGMO:n  $n$  kilpailijaa. Kilpailun jälkeen kilpailijat jonottavat ravintolan edessä seuraavien sääntöjen mukaisesti.

- Tuomaristo valitsee kilpailijoiden alkuperäisen järjestyksen.
- Kerran minuutissa tuomaristo valitsee kokonaisluvun  $i$ , joka toteuttaa ehdon  $1 \leq i \leq n$ .
  - Jos kilpailijan  $C_i$  edessä on vähintään  $i$  kilpailijaa, kilpailija  $C_i$  maksaa yhden euron tuomaristolle ja siirtyy jonossa eteenpäin  $i$  paikkaa.
  - Jos kilpailijan  $C_i$  edessä on vähemmän kuin  $i$  kilpailijaa, ravintola aukeaa ja prosessi loppuu.

- (a) Osoita, että riippumatta siitä mitä päätöksiä tuomaristo tekee, on prosessin ennen pitkää loputtava.
- (b) Määritä kaikilla luvun  $n$  arvoilla suurin mahdollinen määrä euroja, jonka tuomaristo voi kerätä valitsemalla ovelasti alkuperäisen järjestyksen ja siirrot.