Woensdag 11 april 2018

Opgave 1. Zij ABC een driehoek met $|CA| = |CB|$ en $\angle ACB = 120°$ en zij M het midden van AB. Zij P een variabel punt op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC en zij Q het punt op lijnstuk CP zodat $|QP| = 2|QC|$. De lijn door P loodrecht op AB snijdt de lijn MQ in een uniek punt N.

Bewijs dat er een vaste cirkel bestaat waar N altijd op ligt, onafhankelijk van de positie van P.

Opgave 2. Beschouw de verzameling

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \;\middle|\; k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) Bewijs dat elk geheel getal $x \geq 2$ geschreven kan worden als het product van één of meer (niet noodzakelijk verschillende) elementen van A.

(b) Voor elk geheel getal $x \geq 2$, definiëren we $f(x)$ als het kleinste gehele getal zodat x geschreven kan worden als het product van $f(x)$ (niet noodzakelijk verschillende) elementen van A.

Bewijs dat er oneindig veel paren (x, y) van gehele getallen bestaan met $x \geq 2$, $y \geq 2$ en

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Paren (x_1, y_1) en (x_2, y_2) zijn verschillend dan en slechts dan als $x_1 \neq x_2$ of $y_1 \neq y_2$).

Opgave 3. De n deelnemers van een EGMO heten $C_1, \ldots, C_n$. Na afloop van de wedstrijd vormen ze een rij voor het restaurant waarbij de volgende regels gevolgd worden.

- De Jury bepaalt de beginvolgorde van de deelnemers in de rij.
- Daarna doet de Jury iedere minuut een *zet* door een geheel getal i te kiezen met $1 \leq i \leq n$.
  - Als deelnemer C_i ten minste i andere deelnemers voor zich heeft staan, betaalt ze een euro aan de Jury en gaat ze precies i plaatsen naar voren in de rij.
  - Als deelnemer C_i minder dan i andere deelnemers voor zich heeft staan, gaat het restaurant open en eindigt het proces.

(a) Bewijs dat dit proces niet oneindig lang door kan gaan.

(b) Bepaal voor elke n het grootste aantal euro's dat de Jury kan verzamelen door slim de beginvolgorde en de daaropvolgende zetten te kiezen.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard