Сряда, 11 Април, 2018

Задача 1. Нека ABC е триъгълник, за който $CA = CB$ и $\angle ACB = 120°$, и нека M е средата на AB. Нека P е подвижна точка, лежаща на описаната около ABC окръжност, и нека Q е точка на отсечката CP, такава че $QP = 2QC$. Дадено е, че правата през P, която е перпендикулярна на AB, пресича правата MQ в единствена точка N.

Докажете, че съществува фиксирана окръжност, такава че N лежи на нея за всички възможни позиции на P.

Задача 2. Дадено е множеството

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots\right\}.$$

(а) Докажете, че всяко цяло число $x \geq 2$ може да бъде представено като произведение на един или повече не непременно различни елемента на A.

(б) За всяко цяло число $x \geq 2$, дефинираме $f(x)$ да бъде най-малкото цяло число, такова че x може да бъде представено като произведение на $f(x)$ не непременно различни елемента на A.

Докажете, че съществуват безкрайно много двойки (x, y) от цели числа, такива че $x \geq 2$, $y \geq 2$, и

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Двойките (x_1, y_1) и (x_2, y_2) са различни ако $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$).

Задача 3. n-те участнички в ЕГМО се казват $C_1, \dots, C_n$. След състезанието те се нареждат на опашка пред ресторанта по следните правила.

- Журито избира какъв да е първоначалният ред, в който участничките са наредени на опашката.
- Веднъж на всяка минута Журито избира едно цяло число i, такова че $1 \leq i \leq n$.
  - Ако пред участничка C_i има поне i други участнички, тя плаща едно евро на Журито и се мести с точно i позиции напред в опашката.
  - Ако пред участничка C_i има по-малко от i други участнички, ресторантът отваря и преоцесът приключва.

(а) Докажете, че процесът не може да продължи безкрайно, независимо какви избори направи Журито.

(б) За всяко n намерете максималния брой евра, които Журито може да събере като хитро подбира какви да са началната подредба и редицата от избрани числа.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача е по 7 точки