Language: **Bosnian**

Day: **1**

Srijeda, 11.April, 2018.

Problem 1. Dat je jednakokraki trougao $ABC(AC = BC)$ kome je $\sphericalangle ACB = 120°$. Neka je M središte stranice AB i P proizvoljna tačka na krugu opisanom oko trougla ABC. Neka je Q tačka koja pripada duži CP, takva da važi $QP = 2QC$. Označimo sa N tačku presjeka prave koja sadrži tačku P i normalna je na AB i prave MQ. Dokazati da tačka N pripada nekom fiksnom krugu, ma kako odabrali tačku P.

Problem 2. Posmatrajmo skup $A = \left\{1 + \frac{1}{k} \mid k = 1,2,3,\ldots\right\}$.

a) Dokazati da se svaki prirodan broj $x(x \geq 2)$, može napisati kao proizvod jednog ili više (ne obavezno različitih) elemenata iz A.

b) Za svaki prirodan broj $x(x \geq 2)$, označimo sa $f(x)$ najmanji prirodan broj takav da se x može napisati kao proizvod $f(x)$ (ne obavezno različitih) elemenata iz A. Dokazati da postoji beskonačno mnogo parova (x, y) prirodnih brojeva $(x \geq 2, y \geq 2)$ za koje je

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Napomena: Parovi (x_1, y_1) i (x_2, y_2) su različiti ako je $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$.)

Problem 3. Na EGMO učestvuje n takmičarki. Imenujmo ih sa $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Nakon takmičenja, žiri će postrojiti takmičarke u red (svaka takmičarka, osim prve, gleda u leđa takmičarki ispred nje) ispred restorana i započeti "proces naplate" po sljedećim pravilima:

- Žiri određuje početni raspored takmičarki u redu.
- Svakog minuta žiri će odabrati prirodan broj i iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$.
- Ako takmičarka C_i ima najmanje i drugih takmičarki ispred sebe, ona će platiti 1 evro žiriju i pomjeriće se za tačno i mjesta naprijed(prema početku reda).
- Ako takmičarka C_i ima manje od i drugih takmičarki ispred sebe, "proces naplate" se završava i sve takmičarke ulaze u restoran.

a) Dokazati da "proces naplate" ne može trajati neograničeno dugo.

b) Za svaki prirodan broj n, odrediti maksimalan broj evra koji žiri može prikupiti.
(Napomena: Pretpostavlja se da je žiri dovoljno mudar da odabere početni raspored i redosled izvođenja poteza pri naplati, kako bi taj maksimalan broj evra prikupio.)