

Çərşənbə, 11 aprel 2018

Məsələ 1. ABC üçbucağında $CA=CB$ və $\angle ACB = 120^\circ$. AB tərəfinin orta nöqtəsini M ilə işarə edək. P nöqtəsi, ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin üzərində götürülmüş dəyişən nöqtə, Q isə $QP = 2QC$ olacaq şəkildə CP parçasının üzərində götürülmüş nöqtə olsun. P nöqtəsindən keçən və AB tərəfinə perpendikulyar olan düz xətt MQ düz xəttini yeganə olan N nöqtəsində kəsir.

İsbat edin ki, elə bir sabit çevrə mövcuddur ki, P nöqtəsinin seçilmə mövqeyindən asılı olmayaraq N nöqtəsi həmin çevrə üzərində yerləşər.

Məsələ 2. A çoxluğu

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

kimi təyin edilmişdir.

- (a) İsbat edin ki, istənilən $x \geq 2$ tam ədədi, A -dan olan və fərqli olmaları vacib olmayan istənilən bir və ya bir neçə elementin hasilini şəkildə yazıla bilər.
- (b) İstənilən $x \geq 2$ tam ədədi üçün $f(x)$ ilə elə ən kiçik tam ədədi işarə edək ki, x ədədini A çoxluğundan olan və fərqli olmaları vacib olmayan $f(x)$ sayda elementlərinin hasilini şəkildə yazmaq mümkün olsun.

İsbat edin ki, $x \geq 2$, $y \geq 2$ olmaqla sonsuz sayda (x, y) – tam ədədlər cütləri üçün

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

şərti ödənilir.

$((x_1, y_1)$ və (x_2, y_2) cütləri $x_1 \neq x_2$ və ya $y_1 \neq y_2$ olduqda fərqli cütlər hesab edilir).

Məsələ 3. Avropa Qızlar Riyaziyyat Olimpiadasında iştirak edən n sayda iştirakçının hər birinə C_1, \dots, C_n nömrələrindən biri verilmişdir. İmtahandan sonra iştirakçılar restoranın qarşısında aşağıdakı şərtlərə rəəyyət etməklə bir çərgə halında bir-birinin arxasınca düzülürlər.

- İştirakçıların başlanğıc düzülüş ardıcılığını münisflər heyəti müəyyən edir.
 - Hər dəqiqədə münisflər heyəti $1 \leq i \leq n$ intervalından bir i tam ədədini seçir.
- əgər C_i nömrəli iştirakçının qarşısında heç olmazsa i sayda başqa iştirakçı varsa, həmin iştirakçı münisflər heyətinə bir avro ödəyir və özündən öndə olan tam i sayda iştirakçının önünə keçir.
- əgər C_i nömrəli iştirakçının qarşısında i -dən daha az iştirakçı olarsa, restoranın qapıları açılır və proses tamamlanır.
- (a) İsbat edin ki, münisflərin heyətinin seçimindən asılı olmayaraq bu proses sonsuz uzun müddət davam edə bilməz
- (b) Hər bir n ədədi üçün münisflər heyəti tərəfindən iştirakçıların ilkin düzülüşünü və əməliyyatların ardıcılığını düzgün seçməklə əldə ediləcək avroların maksimum sayını müəyyən edin.