Language: **Arabic (Tunisian)**

Day: **1**

الأربعاء 11 أفريل 2018

المسألة 1. ليكن المثلث ABC بحيث $CA = CB$ و $\widehat{ACB} = 120°$، و لتكن M منتصف [AB].
لتكن P نقطة متغيرة على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و لتكن Q نقطة على القطعة [CP] بحيث $QP = 2.QC$.
نعتبر المستقيم المار من P و العمودي على (AB) يقطع المستقيم (MQ) في النقطة الوحيدة N.
بين أنه توجد دائرة ثابتة بحيث أن N تنتمي لهذه الدائرة مهما كان موقع P.

المسألة 2. نعتبر المجموعة

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} \text{ بحيث } k = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

أ) بين أنه مهما كان العدد الصحيح $x \geq 2$، يمكن كتابته كجذاء عنصر أو أكثر من عناصر $\mathbf{A}$ ليست بالضرورة مختلفة.

ب) مهما كان العدد الصحيح $x \geq 2$، ليكن $f(x)$ أصغر عدد صحيح بحيث يمكن كتابة x كجذاء لـ $f(x)$ عنصر من A ليسوا بالضرورة مختلفين.

بين أنه يوجد عدد غير متناهي من الأزواج الصحيحة (x, y) بحيث $x \geq 2$ و $y \geq 2$ و $f(xy) < f(x) + f(y)$.
(الزوجان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مختلفان إذا $x_1 \neq x_2$ أو $y_1 \neq y_2$).

المسألة 3. لدينا n من الطالبات في مسابقة EGMO أسماؤهن $C_1, C_2, \ldots, C_n$. بعد المسابقة وقفن في صفٍّ أمام المطعم وفق للشروط التالية:

- اللجنة المنظمة هي من تقوم باختيار الترتيب الأول للطالبات في الصفّ.
- كل دقيقة، اللجنة المنظمة تختار أيضاً عددا صحيحا i حيث $1 \leq i \leq n$.
  - إذا كان أمام الطالبة C_i على الأقل i من الطالبات تدفع يورو واحد للجنة المنظمة وتتقدم في الصف i من المواضع بالضبط.
  - إذا كان أمام الطالبة C_i أقل من i من الطالبات فإن المطعم يفتح وتنتهي العملية.

(a) اثبت أن العملية لن تستمر إلى ما لا نهاية له أياً كان اختيار الترتيب الأول للجنة المنظمة.

(b) حدد لكل n ، أكبر عدد من اليورو يمكن للجنة المنظمة أن تجمعها بحسن اختيار الترتيب الأول وتسلسل الحركات اللاحقة.

التوقيت: 4 ساعات و نصف **اللغة: العربية**

لكل سؤال 7 نقاط