Language: **Arabic**

Day: **1**

الأربعاء 11 أبريل 2018.

السؤال الأول: ليكن ABC مثلثاً فيه $CA = CB$ و $\angle ACB = 120^\circ$ و M منتصف AB . لتكن P نقطة متغيرة على محيط الدائرة ABC و Q نقطة على القطعة المستقيمة CP بحيث $QP = 2QC$. معطى أن المستقيم المار بالنقطة P عمودياً على AB يقطع المستقيم MQ في نقطة وحيدة N . اثبت أنه توجد دائرة ثابتة بحيث N تقع عليها لكل المواضع الممكنة لنقطة P.

السؤال الثاني: لدينا المجموعة

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

(a) اثبت أن لكل عدد صحيح $x \geq 2$ يمكن كتابته كحاصل ضرب عنصر أو أكثر من عناصر A والتي ليست بالضرورة مختلفة.

(b) لكل عدد صحيح $x \geq 2$ ، لتكن $f(x)$ ترمز إلى أقل عدد صحيح بحيث x يمكن كتابته كاصل ضرب $f(x)$ عنصراً من عناصر والتي ليست بالضرورة مختلفة.

اثبت أنه يوجد عدد منتهٍ من الأزواج المرتبة الصحيحة (x, y) بحيث $x \geq 2, y \geq 2$ و

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

(الزوجان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مختلفان إذا كان $x_1 \neq x_2$ أو $y_1 \neq y_2$).

السؤال الثالث: لدينا n من الطالبات في مسابقة EGMO أسماؤهم هي $C_1, C_2, \ldots, C_n$. بعد المسابقة وقفن في طابور أمام المطعم تبعاً للشروط التالية:

- اللجنة المنظمة هي من تقوم باختيار الترتيب الأول للطالبات في الطابور.
- كل دقيقة، اللجنة المنظمة تختار أيضاً عدد صحيح i حيث $1 \leq i \leq n$.
  - إذا كان أمام الطالبة C_i على الأقل i من الطالبات تدفع يورو واحد للجنة المنظمة وتتحرك للأمام في الطابور i من المواضع بالضبط.
  - إذا كان أمام الطالبة C_i أقل من i من الطالبات فإن المطعم يفتح وتنتهي العملية.

(a) اثبت أن العملية لن تستمر لأجل غير مسمى أياً كان إختيار الترتيب الأول للجنة المنظمة.

(b) لكل n ، عين أكبر عدد من اليورو يمكن للجنة المنظمة أن تجمعها بدهاء باختيار الترتيب الأول وتسلسل الحركات اللاحقة.

الوقت: 4 ساعات و نصف — **اللغة: العربية**

لكل سؤال 7 درجات