Четвер, 9 квітня, 2017 р.

Задача 4. Нехай $n \geq 1$ — ціле число і нехай $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — натуральні числа. У групі з $t_n + 1$ людини відбулося декілька шахових партій. Дві людини могли зіграти між собою максимум одну партію. Доведіть, що можлива ситуація коли одночасно виконуються такі умови:

(i) Кількість партій, зіграних кожною людиною, є одним із чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Для кожного i такого, що $1 \leq i \leq n$, існує людина, що зіграла рівно t_i шахових партій.

Задача 5. Нехай $n \geq 2$ — ціле число. Упорядкований набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не обов'язково різних натуральних чисел назвемо *коштовною n-кою* якщо існує натуральне число k таке, що

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Знайдіть всі цілі числа $n \geq 2$ для яких існує коштовна n-ка.

b) Доведіть, що для кожного непарного натурального числа m існує ціле число $n \geq 2$ таке, що число m зустрічається у деякій коштовній n-ці.

Ліва частина рівності складається рівно з n множників.

Задача 6. Задано гострокутний трикутник ABC, всі сторони якого різні. Точки, що симетричні до центроїду G і до центру описаного кола O трикутника ABC відносно його сторін BC, CA, AB позначимо через G_1, G_2, G_3 та O_1, O_2, O_3 відповідно. Доведіть, що описані кола трикутників G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A і ABC перетинаються в одній точці.

Центроїдом трикутника називається точка перетину його медіан.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів