Domingo 9 de abril de 2017

Problema 4. Sea $n \geq 1$ un entero y sean $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ enteros positivos. En un grupo de $t_n + 1$ personas, se juegan algunas partidas de ajedrez. Dos personas pueden jugar entre sí a lo más una vez. Demuestra que es posible que las siguientes dos condiciones se den al mismo tiempo:

(i) El número de partidas jugadas por cada persona es uno de los números $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Para cada i con $1 \leq i \leq n$, hay al menos una persona que juega exactamente t_i partidas de ajedrez.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero. Una n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de enteros positivos no necesariamente distintos es *costosa* si existe un entero positivo k tal que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existe una n-tupla costosa.

b) Demuestra que para todo entero positivo impar m existe un entero $n \geq 2$ tal que m pertenece a una n-tupla costosa.

Hay exactamente n factores en la parte izquierda de la igualdad.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo que no tiene dos lados con la misma longitud. Las reflexiones del baricentro G y el circuncentro O de ABC con respecto a los lados BC, CA, AB se denotan como G_1, G_2, G_3, y O_1, O_2, O_3, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A y ABC tienen un punto en común.

El baricentro (o gravicentro) de un triángulo es el punto de intersección de sus tres medianas. Una mediana es el segmento que conecta un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos