nedelja, 9. april 2017

Naloga 4. Naj bo $n \geq 1$ naravno število in naj bodo $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ naravna števila. V skupini $t_n + 1$ ljudi je bilo odigranih nekaj iger šaha. Dva človeka sta igrala drug proti drugemu kvečjemu enkrat. Dokaži, da je možno, da sta bila sledeča pogoja izpolnjena hkrati:

(i) Število iger, ki jih je odigral vsak človek je bilo eno od števil $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Za vsak i z $1 \leq i \leq n$ obstaja nekdo, ki je odigral natanko t_i iger šaha.

Naloga 5. Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Za n-terico ne nujno različnih naravnih števil $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pravimo, da je *draga*, če obstaja naravno število k, da velja

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Poišči vsa naravna števila $n \geq 2$, za katera obstaja draga n-terica.

b) Dokaži, da za vsako liho število m obstaja tako naravno število $n \geq 2$, da je število m vsebovano v neki dragi n-terici.

V zmnožku na levi strani enakosti je natanko n faktorjev.

Naloga 6. Naj bo ABC ostrokoten trikotnik v katerem nobeni dve stranici nista iste dolžine. Zrcalne slike težišča G in središča očrtane krožnice O trikotnika ABC preko njegovih stranic BC, CA, AB zaporedoma označimo z G_1, G_2, G_3 in O_1, O_2, O_3. Dokaži, da se očrtane krožnice trikotnikov G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A in ABC sekajo v isti točki.

Težišče trikotnika je presečišče treh težiščnic. Težiščnica je daljica, ki povezuje oglišče trikotnika in razpolovišče nasprotne stranice.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk.