EGMO 2017 Zürich

Language: **Serbian (BIH)**

Day: **2**

Недеља, 9.април, 2017

Задатак 4. Нека је $n \geq 1$ цијели број и нека су $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ позитивни цијели бројеви. У групи од $t_n + 1$ људи, одиграно је неколико шаховских партија. Два човјека могу одиграти највише једну партију. Доказати да је могуће да оба сљедећа услова буду истовремено задовољена:

(i) Број партија коју је одиграла свака особа је један од бројева $t_1,\ t_2, \dots,\ t_n$.

(ii) За свако i , $1 \leq i \leq n$, постоји особа која је одиграла тачно t_i партија шаха.

Задатак 5. Нека је $n \geq 2$ цијели број. За n-торку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, не обавезно различитих позитивних цијелих бројева, кажемо да је *интересантна*, ако постоји позитиван цијели број k такав да вриједи:

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

а) Наћи све цијеле бројеве $n \geq 2$ за које постоји интерсантна n-торка.

б) Доказати да за сваки непаран позитиван цијели број m, постоји цијели број $n \geq 2$, такав да m припада некој интересантној n-торци.

Напомена: На лијевој страни једнакости налази се тачно n чинилаца.

Задатак 6. Нека је ABC оштроугли троугао који нема двије странице исте дужине. Тачке осносиметричне тежишту троугла G и центру описаног круга O овог троугла у односу на странице BC, CA и AB означимо са $G_1,\ G_2,\ G_3$, и $O_1,\ O_2,\ O_3$, редом. Доказати да кругови описани око троуглова $G_1G_2C,\ G_1G_3B,\ G_2G_3A,\ O_1O_2C,\ O_1O_3B,\ O_2O_3A$ и ABC имају заједничку тачку.

Напомена: Тежиште троугла је пресјечна тачка три тежишне линије троугла. Тежишна линија је дуж која спаја тјеме троугла са средином наспрамне странице.

Language:Serbian(BiH)

Вријеме: 4 сата и 30 минута

Сваки проблем вриједи 7 бодова