nedelja, 9. april 2017.

Zadatak 4. Dat je prirodan broj $n \geq 1$, kao i prirodni brojevi $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. U grupi od $t_n + 1$ ljudi odigran je neki broj partija šaha. Svake dve osobe su međusobno odigrale najviše jednu partiju. Dokazati da je moguće da su sledeća dva uslova istovremeno zadovoljena:

(i) Broj partija koju je odigrala svaka od osoba je jedan od brojeva $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Za svako i za koje važi $1 \leq i \leq n$, bar jedna osoba je odigrala tačno t_i partija.

Zadatak 5. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Za n-torku prirodnih brojeva $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kažemo da je *paprena* ako postoji prirodan broj k tako da

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Naći sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje postoji paprena n-torka.

b) Dokazati da za svaki neparan prirodan broj m postoji prirodan broj $n \geq 2$ tako da m pripada nekoj paprenoj n-torci.

U proizvodu na levoj strani jednakosti ima tačno n faktora.

Zadatak 6. Dat je oštrougli trougao ABC čije su sve stranice različite dužine. Označimo tačke koje se dobijaju preslikavanjem težišta G i centra opisane kružnice O trougla ABC preko stranica BC, CA, AB sa G_1, G_2, G_3 i O_1, O_2, O_3, respektivno. Pokazati da kružnice opisane oko trouglova G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A i ABC imaju zajedničku tačku.

Težište trougla je tačka u preseku težišnih linija. Težišna linija je duž koja spaja teme trougla sa središtem naspramne stranice.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.