Duminică, 9 aprilie 2017

Problema 4. Fie $n \geq 1$ un întreg şi $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ întregi strict pozitivi. Într-un grup de $t_n + 1$ persoane se organizează câteva partide de şah. Două persoane joacă unul cu celălalt cel mult o dată. Demonstraţi că este posibil ca următoarele condiţii să fie îndeplinite simultan:

(i) Numărul partidelor jucate de fiecare persoană este unul dintre numerele $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Pentru orice i cu $1 \leq i \leq n$, există cineva care a jucat exact t_i partide.

Problema 5. Fie $n \geq 2$ un întreg. Un n-uplu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de întregi strict pozitivi, nu neapărat distincţi, este *scump* dacă există un întreg pozitiv k astfel încât

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Determinaţi toţi întregii $n \geq 2$ pentru care există un n-uplu scump.

b) Demonstraţi că pentru orice întreg pozitiv impar m există un întreg $n \geq 2$ astfel încât m aparţine unui n-uplu scump.

În produsul din membrul stâng există exact n factori.

Problema 6. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care orice două laturi au lungimi diferite. Simetricele centrului său de greutate G şi ale centrului O al cercului său circumscris faţă de laturile BC, CA, AB sunt notate G_1, G_2, G_3 şi, respectiv, O_1, O_2, O_3. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A şi ABC au un punct comun.

Centrul de greutate la unui triunghi este intersecţia celor trei mediane. O mediană este o dreaptă care trece printr-un vârf şi prin mijlocul laturii opuse.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte