Domingo, 9 de abril de 2017

Problema 4. Seja $n \geq 1$ um inteiro e sejam $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ inteiros positivos. Em um grupo de $t_n + 1$ pessoas, algumas partidas de xadrez são jogadas. Duas pessoas podem jogar uma contra outra no máximo uma vez. Prove que é possível que ambas as condições a seguir sejam satisfeitas ao mesmo tempo:

(i) O número de partidas jogadas por cada pessoa é um dos números $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Para cada i com $1 \leq i \leq n$, há alguém que jogou exatamente t_i partidas de xadrez.

Problema 5. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Uma n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de inteiros positivos, não necessariamente diferentes, é *dispendiosa* se há algum inteiro positivo k tal que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Encontre todos os inteiros $n \geq 2$ para os quais existe uma n-upla dispendiosa .

b) Prove que para todo inteiro positivo ímpar m existe um inteiro $n \geq 2$ tal que m pertence a uma n-upla dispendiosa.

Existem exatamente n fatores no produto do lado esquerdo.

Problema 6. Seja ABC um triângulo acutângulo no qual não há dois lados com a mesma medida. As reflexões do baricentro G e do circuncentro O de ABC através dos lados BC, CA, AB são denotadas por G_1, G_2, G_3, e O_1, O_2, O_3, respectivamente. Mostre que os circuncírculos dos triângulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A e ABC têm um ponto em comum.

O baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção de suas três medianas. Uma mediana é um segmento ligando um vértice do triângulo ao ponto médio de seu lado oposto.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos