niedziela, 9 kwietnia 2017 r.

Zadanie 4. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą i niech $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. W grupie $t_n + 1$ osób rozegrano pewną liczbę partii szachowych. Każde dwie osoby zagrały ze sobą co najwyżej raz. Dowieść, że oba poniższe warunki mogą być jednocześnie spełnione:

(i) Dla każdej osoby liczba partii rozegranych przez tę osobę występuje wśród liczb $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Dla każdego i, przy czym $1 \leqslant i \leqslant n$, istnieje osoba, która rozegrała dokładnie t_i partii.

Zadanie 5. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Powiemy, że n-tka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dodatnich liczb całkowitych jest *droga*, jeśli istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieje droga n-tka.

b) Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby nieparzystej m istnieje taka liczba całkowita $n \geqslant 2$, że m należy do pewnej drogiej n-tki.

Uwaga. W iloczynie znajdującym się po lewej stronie równości występuje dokładnie n czynników.

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym każde dwa boki mają różną długość. Punkty G i O są odpowiednio środkiem ciężkości trójkąta ABC oraz środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkty G_1, G_2, G_3 są punktami symetrycznymi do punktu G względem odpowiednio prostych BC, CA, AB. Punkty O_1, O_2, O_3 są punktami symetrycznymi do punktu O względem odpowiednio prostych BC, CA, AB. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A i ABC przecinają się w jednym punkcie.

Uwaga. Środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia wszystkich trzech środkowych tego trójkąta. Środkowa trójkąta to odcinek łączący pewien wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.