Søndag 9. april 2017

Oppgave 4. La $n \geq 1$ være et heltall og la $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ være positive heltall. I en gruppe på $t_n + 1$ personer spilles det noen sjakkspill. To personer spiller mot hverandre høyst én gang. Vis at det er mulig for begge følgende betingelser å holde samtidig:

(i) For hver person er antallet spilte sjakkspill ett av tallene $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) For hver i med $1 \leq i \leq n$ finnes det noen som har spilt nøyaktig t_i sjakkspill.

Oppgave 5. La $n \geq 2$ være et heltall. Et n-tuppel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ av – ikke nødvendigvis forskjellige – positive heltall kalles *dyrt* dersom det finnes et positivt heltall k slik at

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Finn alle heltall $n \geq 2$ for hvilke det finnes et dyrt n-tuppel.

b) Vis at der for ethvert positivt oddetall m finnes et heltall $n \geq 2$ slik at m tilhører et dyrt n-tuppel.

Produktet på venstre side består av nøyaktig n faktorer.

Oppgave 6. La ABC være en spissvinklet trekant der de tre sidene har forskjellige lengder. La G være tyngdepunktet i ABC, og O omsenteret. Ved å speile G om hver av sidene BC, CA, AB får vi punktene henholdsvis G_1, G_2, G_3, og ved å speile O om de samme sidene får vi punktene henholdsvis O_1, O_2, O_3. Vis at omsirklene til trekantene G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A og ABC har et felles punkt.

Tyngdepunktet i en trekant er skjæringspunktet mellom dens medianer. En median i en trekant er et linjestykke som forbinder et hjørne med midtpunktet på motstående side.

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng