недела, 9 април, 2017

Проблем 4. Нека $n \geq 1$ е цел број, и нека $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ се позитивни цели броеви. Во група од $t_n + 1$ луѓе некои одиграле меѓу себе партија шах. Било кои два члена од групата меѓусебно може да одиграат најмногу една партија шах. Докажи дека е можно следните два услови да се истовремено исполнети:

(i) Бројот на партии шах кои ги одиграл било кој член од групата е еден од броевите $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) За секој i за кој е исполнето $1 \leq i \leq n$, постои барем еден член од групата кој одиграл точно t_i партии шах.

Проблем 5. Нека $n \geq 2$ е цел број. Подредената n-торка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ од позитивни цели броеви ја нарекуваме *скапа* ако постои позитивен цел број k таков што

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

а) Да се најдат сите цели броеви $n \geq 2$ за кои што постои *скапа* n-торка,

б) Докажи дека за секој непарен позитивен цел број m постои цел број $n \geq 2$ таков што m припаѓа на некоја *скапа* n-торка.

На левата страна на равенството има точно n-множители.

Проблем 6. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник. Симетричните точки на тежиштето G на триаголникот ABC во однос на страните BC, CA, AB ги означуваме со G_1, G_2, G_3 соодветно, а симетричните точки на центарот O на опишаната кружница на триаголникот ABC во однос на страните BC, CA, AB ги означуваме со O_1, O_2, O_3 соодветно. Докажи дека опишаните кружници околку триаголниците G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A и ABC се сечат во една точка.

Тежиште на триаголник е точка на пресек на тежишните линии. Тежишна линија е отсечка која го спојува теме со средината на спротивната страна.

Language: **Macedonian**

Време за работа: **4 часа и 30 минути**

За секој точно решен проблем се добиваат најмногу 7