EGMO 2017 Zürich

Language: **Lithuanian**

Day: **2**

2017 m. balandžio 9 d., sekmadienis

4 uždavinys. Duoti natūralusis skaičius n ir natūralieji skaičiai $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Grupės, kurią sudaro $t_n + 1$ žmonių, nariai lošia šachmatais. Bet kuriems dviem žmonėms leidžiama sulošti vienam su kitu tik vieną partiją. Įrodykite, kad šachmatais galima sulošti, kad vienu metu būtų tenkinamos šios dvi sąlygos:

(i) kiekvieno žmogaus suloštų partijų skaičius lygus kuriam nors iš skaičių $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

(ii) kiekvienam natūraliajam i, tenkinančiam $1 \leq i \leq n$, egzistuoja žmogus, sulošęs lygiai t_i partijų.

5 uždavinys. Nagrinėkime bet kurį natūralųjį skaičių $n \geq 2$. Rinkinį $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kurio elementai yra (nebūtinai skirtingi) natūralieji skaičiai, vadinsime *prabangiu*, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius k, kad

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Raskite visus natūraliuosius $n \geq 2$, kuriems egzistuoja prabangus rinkinys, sudarytas iš n elementų.

b) Įrodykite: kiekvienam nelyginiam natūraliajam skaičiui m egzistuoja toks natūralusis skaičius $n \geq 2$, kad m priklauso kokiam nors prabangiam rinkiniui, sudarytam iš n elementų.

Duotosios lygybės kairėje pusėje sudauginta lygiai n dauginamųjų.

6 uždavinys. Duotas smailusis trikampis ABC, kurio jokios dvi kraštinės nėra lygios. Taškai, simetriški trikampio ABC centroidui G ir apibrėžtinio apskritimo centrui O kraštinių BC, CA, AB atžvilgiu atitinkamai pažymėti G_1, G_2, G_3 ir O_1, O_2, O_3. Įrodykite, kad trikampių G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A ir ABC apibrėžtiniai apskritimai turi bendrą tašką.

Trikampio centroidas yra jo trijų pusiaukraštinių sankirtos taškas. Pusiaukraštinė jungia trikampio viršūnę su priešingos kraštinės vidurio tašku.

Darbo laikas: 4 val. 30 min.
Kiekvieno uždavinio vertė yra 7 taškai