Svētdien, 2017. gada 9.aprīlī

Uzdevums. 4. Dots naturāls skaitlis $n \geq 1$, un doti naturāli skaitļi $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Zināms, ka $t_n + 1$ dalībnieki savstarpēji izspēlējuši dažas šaha partijas, un katrs dalībnieku pāris savā starpā nospēlējis ne vairāk kā vienu partiju. Pierādīt, ka ir iespējams gadījums, kad nosacījumi (i) un (ii) izpildās vienlaicīgi:

(i) Katram dalībniekam nospēlēto partiju skaits ir kāds no skaitļiem $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Katram skaitlim i, tādam, ka $1 \leq i \leq n$, var atrast kādu spēlētāju, kas nospēlējis tieši t_i spēles.

Uzdevums. 5. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Nosauksim n naturālu skaitļu virkni $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kurā ir n sakārtoti elementi, un, kurā elementi var atkārtoties, par n-kortežu. Nosauksim n-kortežu par *dārgu* n-kortežu, ja eksistē naturāls skaitlis k, kuram

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Atrast visus naturālos skaitļus $n \geq 2$, kuriem eksistē dārgs n-kortežs.

b) Pierādīt, ka katram naturālam nepāra skaitlim m eksistē naturāls skaitlis $n \geq 2$, tāds, ka m pieder kādam dārgam n-kortežam.

Piezīme: Izteiksmes kreisajā pusē ir n reizinātāji.

Uzdevums. 6. Šaurleņķa dažādmalu trijstūrī ABC mediānu krustpunktam G un apvilktās riņķa līnijas centram O konstruēti simetriski punkti pret malām BC, CA, AB un attiecīgi apzīmēti ar G_1, G_2, G_3 un O_1, O_2, O_3. Pierādīt, ka visām, ap trijstūriem G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A un ABC apvilktajām, riņķa līnijām ir kopīgs punkts.

Piezīme. Trijstūra mediāna ir nogrieznis, kas savieno virsotni ar pretējās malas viduspunktu.

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.