Жексенбі, 9 сәуір 2017 ж.

Есеп 4. $n \geq 1$ — бүтін және $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — натурал сандары берілген. $t_n + 1$ адамнан тұратын тобында кейбір ойыншылар бір бірімен шахмат ойнады. Кез келген екі адам бір бірімен ең көп дегенде бір рет ойнады. Келесі екі шарт қанағаттандыратын мүмкіндік болатынын дәлелдеңіз:

(i) Әр адамның ойындарының саны келесі сандарының бірі: $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Кез келген i саны үшін $(1 \leq i \leq n)$, тура t_i ойын ойнаған адам табылады.

Есеп 5. $n \geq 2$ — бүтін саны берілген. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ реттелген жиынтығы *қымбат n-жиынтық* деп аталады (жиынтықта кейбір сандар тең болуы мүмкін), егер келесі шарт орындалатындай k натурал сан табылса:

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) *Қымбат n-жиынтық* табылатындай барлық бүтін $n \geq 2$ сандырын табыңыз.

b) Кез келген тақ натурал m саны үшін кейбір *қымбат n-жиынтықта* m саны кездесетіндей бүтін $n \geq 2$ саны табылатынын дәлелдеңіз.

Теңдіктің сол жағы тура n көбейтіндіден құрылған.

Есеп 6. Қабырғалары бір біріне тең емес ABC сүйір бұрышты үшбұрыш берілген. G_1, G_2, G_3 және O_1, O_2, O_3 нүктелері сәйкесінше ABC үшбұрышының G ауырлық ортасына және сырттай сызылған шеңберінің O ортасына BC, CA, AB қабырғаларына қатысты симметриялы болсын. G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A және ABC үшбұрыштарының сырттай сызылған шеңберлері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.
Үшбұрыштың медианалар қиылысу нүктесі ауырлық ортасы деп аталады.

Уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 7 ұпаймен бағаланады