EGMO 2017 Zürich

Language: **Japanese**

Day: 2

2017 年 *4* 月 *9* 日 日曜日

問題 4. n を正の整数, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ を正の整数とする. $t_n + 1$ 人の人が, どの 2 人組についても高々1 回しか対戦しないように, チェスの大会を行う. 以下の 2 つの条件を同時にみたすような対戦の仕方が存在することを示せ：

(i) どの人の対戦回数も $t_1, t_2, \ldots, t_n$ のいずれかである.

(ii) 各 $1 \leqq i \leqq n$ に対し, ちょうど t_i 回対戦した人が存在する.

問題 5. n を 2 以上の整数とする. n 個の正の整数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が**高級**であるとは, ある正の整数 k が存在して,

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}$$

をみたすことをいう.

a) 2 以上の整数 n であって, 高級な n 個の正の整数の組が存在するようなものをすべて求めよ.

b) 任意の正の奇数 m に対して, ある 2 以上の整数 n が存在して, m がある高級な n 個の正の整数の組に属すことを示せ.

ただし, 条件式の左辺は n 個の因数の積である.

問題 6. どの辺の長さも相異なる鋭角三角形 ABC がある. 三角形 ABC の重心 G と外心 O を辺 BC, CA, AB に関して対称移動させた点をそれぞれ G_1, G_2, G_3 と O_1, O_2, O_3 とする. このとき, 三角形 G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A, ABC それぞれの外接円は共通の点を通ることを示せ.

ただし, 三角形の重心とは, 3 本の中線の交点のことである. また中線とは, 三角形の頂点と, その対辺の中点を結ぶ直線のことである.

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点