Domenica, 9 aprile 2017

Problema 4. Sia $n \geq 1$ un intero e siano $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ interi positivi. All'interno di un gruppo di $t_n + 1$ persone si giocano alcune partite di scacchi, in modo tale che nessuna coppia giochi più di una partita. Dimostrare che è possibile soddisfare contemporaneamente le due condizioni seguenti:

(i) il numero di partite giocate da ciascuno è un intero fra $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

(ii) per ogni i con $1 \leq i \leq n$ esiste una persona del gruppo che ha giocato esattamente t_i partite.

Problema 5. Sia $n \geq 2$ un intero. Una n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di interi positivi (non necessariamente distinti) è *preziosa* se esiste un intero positivo k tale che

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Trovare tutti gli interi $n \geq 2$ per i quali esiste una n-upla preziosa.

b) Dimostrare che per ogni intero positivo dispari m esiste un intero $n \geq 2$ tale che m fa parte di una n-upla preziosa.

Si noti che il prodotto al primo membro dell'identità è composto da esattamente n fattori.

Problema 6. Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno. Denotiamo i simmetrici del baricentro G e del circocentro O di ABC rispetto ai lati BC, CA, AB con G_1, G_2, G_3 e O_1, O_2, O_3 rispettivamente. Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A e ABC hanno un punto in comune.

Il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle tre mediane. Una mediana è il segmento che collega un vertice al punto medio del lato opposto.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti