2017 Április 9., Vasárnap

4. Feladat Legyen $n \geq 1$ pozitív egész, és $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ pozitív egészek. Egy $t_n + 1$ tagú társaság tagjai lejátszanak néhány sakkpartit úgy, hogy két ember egymással legfeljebb egyszer játszhat. Igazoljuk, hogy teljesülhet egyszerre az alábbi két feltétel:

(i) A társaság minden egyes tagja által lejátszott partik száma a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ számok egyike;

(ii) Minden i-re, ahol $1 \leq i \leq n$, van valaki aki pontosan t_i sakkpartit játszott le.

5. Feladat Legyen $n \geq 2$ egész szám. Az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n tagú, nem feltétlenül különböző pozitív egészekből álló számsort *bőséges*nek mondjuk, ha létezik olyan k pozitív egész szám, melyre

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Határozzuk meg az összes $n \geq 2$ egész számot, melyre létezik bőséges n tagú számsor.

b) Igazoljuk, hogy minden páratlan pozitív m számhoz létezik olyan $n \geq 2$ egész, melyre igaz hogy az m szám tagja egy bőséges n tagú számsornak.

(Pontosan n tényezőből áll a szorzatkifejezés az egyenlőség bal oldalán.)

6. Feladat Jelöljön ABC olyan hegyesszögű háromszöget, melyben minden oldal különböző hosszúságú. Jelölje az ABC háromszög súlypontját G, körülírt körének középpontját O. A G illetve O pontok tükörképei a BC, CA, AB oldalakra rendre G_1, G_2, G_3, illetve O_1, O_2, O_3 pontok. Igazoljuk, hogy G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A valamint az ABC háromszögek körért köreinek van közös pontja.

(Egy háromszög súlypontját a háromszög három súlyvonalának közös metszéspontja határozza meg. A súlyvonalak a háromszög egy csúcsát és az átellenes oldal felezőpontját összekötő egyenesek.)

Megoldási idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér.