יום ראשון, 9 באפריל, 2017

שאלה 4. יהא $n \geq 1$ שלם ויהיו $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ שלמים חיוביים. בקבוצה של $t_n + 1$ נשים נערכו מספר משחקי שחמט. שתי נשים שיחקו אחת נגד השנייה לכל היותר פעם אחת. הוכיחי כי ייתכן ששני התנאים הבאים יתקיימו בו זמנית:

(i) כל אחת מהנשים שיחקה מספר משחקים השווה לאחד מבין $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) לכל i בטווח $1 \leq i \leq n$, קיימת שחקנית אשר שיחקה בדיוק t_i משחקי שחמט.

שאלה 5. יהא $n \geq 2$ שלם. n-ייה $(a_1, \ldots, a_n)$ של שלמים חיוביים, לא בהכרח שונים זה מזה, נקראת **יקרה** אם קיים שלם חיובי k כך ש-

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

א) מצאי את כל השלמים $n \geq 2$ עבורם קיימת n-ייה יקרה.

ב) הוכיחי כי לכל שלם אי-זוגי חיובי m קיים שלם $n \geq 2$ כך ש-m שייך ל-n-ייה יקרה כלשהי.

(יש בדיוק n גורמים במכפלה באגף שמאל של המשוואה.)

שאלה 6. יהא ABC משולש חד-זוויות שאינו שווה-שוקיים. נסמן ב-G את נקודת מפגש התיכונים של המשולש ABC וב-O את מרכז המעגל החוסם שלו. השיקופים של G ו-O ביחס לצלעות BC, CA, AB יסומנו ב-G_1, G_2, G_3 וב-O_1, O_2, O_3, בהתאמה. הראי כי המעגלים החוסמים של $G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A$ ו-ABC נפגשים בנקודה אחת.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות