EGMO 2017 Zürich

Language: **Greek**

Day: 2

*Κυριακή, Απρίλης 9, 2017*

**Πρόβλημα 4.** Ας είναι $n \geq 1$ ένας ακέραιος και ας είναι $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ θετικοί ακέραιοι. Σε μια ομάδα από $t_n + 1$ άτομα, παίχτηκαν κάποια παιχνίδια σκάκι. Δύο άτομα μπορεί να παίξουν μεταξύ τους το πολύ μια φορά. Να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν οι ακόλουθες δύο συνθήκες να ισχύουν ταυτόχρονα:

(i) Ο αριθμός των παιγνιδιών που έγιναν από κάθε άτομο είναι ένας αριθμός από τους $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Για κάθε $i$ με $1 \leq i \leq n$, υπάρχει κάποιος που έχει παίξει ακριβώς $t_i$ παιχνίδια σκάκι.

**Πρόβλημα 5.** Ας είναι $n \geq 2$ ένας ακέραιος. Μια n-άδα ( $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ) από θετικούς ακέραιους , όχι κατανάγκη διαφορετικούς , λέγεται *ακριβή* αν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $k$ έτσι ώστε

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3).....(a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

α) Να βρείτε όλους τους ακέραιους $n \geq 2$ για τους οποίους υπάρχει μια *ακριβή* n-άδα.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε περιττό θετικό αριθμό $m$ υπάρχει ένας ακέραιος $n \geq 2$ έτσι ώστε ο $m$ να ανήκει σε μια *ακριβή* n-άδα.

*Υπάρχουν ακριβώς $n$ παράγοντες στο γινόμενο του πρώτου μέρους της πιο πάνω ισότητας.*

**Πρόβλημα 6.** Ας είναι $ABC$ ένα οξυγώνιο τρίγωνο στο οποίο δεν υπάχουν δύο πλευρές με ίσο μήκος. Τα συμμετρικά σημεία του κέντρου βάρους $G$ και του περίκεντρου $O$ του τριγώνου ABC ως προς τις πλευρές του $BC$, $CA$, $AB$ είναι τα σημεία $G_1, G_2, G_3$ και $O_1, O_2, O_3$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $G_1G_2C$, $G_1G_3B$, $G_2G_3A$, $O_1O_2C$, $O_1O_3B$, $O_2O_3A$ και $ABC$ έχουν ένα κοινό σημείο.

*Το κέντρο βάρους τριγώνου είναι η τομή των τριών διαμέσων. Η διάμεσος είναι η ευθεία που ενώνει την κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.*

Γλώσσα: Ελληνικά

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες