Sonntag, 9. April 2017

Aufgabe 4. Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl und seien $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ positive ganze Zahlen. In einer Gruppe von $t_n + 1$ Personen werden einige Schachpartien gespielt. Zwei Personen können höchstens einmal gegeneinander spielen. Zeige, dass die folgenden zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein können:

(i) Für jede Person ist die Anzahl der von ihr gespielten Partien eine der Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ gibt es eine Person, die genau t_i Schachpartien gespielt hat.

Aufgabe 5. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Ein n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nicht notwendigerweise verschiedener positiver ganzer Zahlen ist *teuer* falls eine positive ganze Zahl k existiert, sodass

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Finde alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ für welche ein teures n-Tupel existiert.

b) Zeige, dass für jede positive ungerade Zahl m eine ganze Zahl $n \geq 2$ existiert, sodass m in einem teuren n-Tupel vorkommt.

Das Produkt auf der linken Seite hat genau n Faktoren.

Aufgabe 6. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit paarweise verschieden langen Seiten. Die Spiegelungen des Schwerpunkts G respektive des Umkreismittelpunkts O des Dreiecks ABC an den Seiten BC, CA, AB seien G_1, G_2, G_3 respektive O_1, O_2, O_3. Zeige, dass die Umkreise der Dreiecke G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A und ABC einen gemeinsamen Punkt haben.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der drei Schwerelinien. Eine Schwerelinie ist eine Gerade, welche durch einen Eckpunkt des Dreiecks und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite geht.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.