EGMO
2017
Zürich

Language: **Georgian**

Day: 2

ამოცანა N4. დავუშვათ , $n \geq 1$ მთელი რიცხვია და $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ დადებითი მთელი რიცხვებია. $t_n + 1$ ადამიანს შორის გაიმართა რამდენიმე საჭადრაკო პარტია. ნებისმიერ ორ ადამიანს, ერთმანეთთან თამაში შეუძლია არაუმეტეს ერთხელ. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი პირობის ერთდროული შესრულება შესაძლებელია:
(i) თითოეული ადამიანის მიერ ნათამაშებ პარტიათა რაოდენობა $t_1; t_2; \ldots; t_n$ რიცხვებიდან ერთ-ერთს უდრის.
(ii) ყოველი i-სთვის, $1 \leq i \leq n$, მოვძებნით ადამიანს რომელმაც ითამაშა ზუსტად t_i პარტია.

ამოცანა N5. $n \geq 2$ მთელი რიცხვია. n-ცალი, არა აუცილებლად განსხვავებული , დადებითი მთელი რიცხვის $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ კრებულს ვუწოდოთ "n *ძვირფასი*", თუ არსებობს , ისეთი დადებითი მთელი k რიცხვი , რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

ა) იპოვეთ, ყველა $n \geq 2$ მთელი რიცხვი, რომელთათვისაც არსებობს "n *ძვირფასი*" კრებული.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ ყოველი კენტი დადებითი მთელი m რიცხვისთვის არსებობს $n \geq 2$ მთელი რიცხვი ისეთი, რომ m ეკუთვნის "n *ძვირფას*" კრებულს.

შენიშვნა: ტოლობის მარცხენა მხარე შეიცავს ზუსტად n-ცალ თანამამრავლს.

ამოცანა N6. ვთქვათ, ABC მახვილკუთხა სამკუთხედია, რომლის ყოველი ორი გვერდის სიგრძე განსხვავებულია. G და O წერტილის სიმეტრიულ წერტილებს ABC სამკუთხედის BC , CA და AB გვერდების მიმართ შესაბამისად G_1, G_2, G_3 და O_1, O_2, O_3 წერტილები წარმოადგენენ. დაამტკიცეთ, რომ G_1G_2C , G_1G_3B, G_2G_3A , O_1O_2C, O_1O_3B , O_2O_3A და ABC სამკუთხედებზე შემოხაზულ წრეწირებს აქვთ საერთო წერტილი.

შენიშვნა: G წერტილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილს, ხოლო , O წერტილი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს.

Language: Georgian

სამუშაო დრო: 4 სთ 30 წთ

თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით