Dimanche 9 avril 2017

Problème 4. Soit $n \geq 1$ un entier et soient $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ des entiers strictement positifs. Dans un groupe de $t_n + 1$ personnes, des parties d'échecs sont jouées. Deux personnes peuvent jouer l'une contre l'autre au plus une fois. Prouver qu'il est possible que les deux propositions suivantes soient satisfaites en même temps :

(i) Le nombre de parties jouées par chaque personne appartient à l'ensemble $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

(ii) Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, il existe une personne qui a joué exactement t_i parties.

Problème 5. Soit $n \geq 2$ un entier. Un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs et non nécessairement distincts est dit *onéreux* s'il existe un entier strictement positif k tel que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Trouver tous les entiers $n \geq 2$ pour lesquels il existe un n-uplet onéreux.

b) Montrer que pour tout entier impair positif m il existe un entier $n \geq 2$ tel que m appartient à un n-uplet onéreux.

Le membre de gauche contient exactement n facteurs.

Problème 6. Soit ABC un triangle ayant trois angles aigus et dont les trois côtés sont de longueurs deux à deux différentes. Les symétriques du centre de gravité G et du centre O du cercle circonscrit à ABC par rapport aux côtés BC, CA et AB sont notés respectivement G_1, G_2, G_3 et O_1, O_2, O_3. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A et ABC passent tous par un même point.

Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes. Une médiane est une droite reliant un sommet du triangle au milieu du côté opposé.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points