



Sunnuntaina 9 huhtikuuta 2017

Tehtävä 4. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku ja olkoot $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ positiivisia kokonaislukuja. $t_n + 1$ ihmisen ryhmässä pelataan jokin määrä shakkipelejä. Kaksi henkilöä voivat pelata toisiaan vastaan enintään kerran. Osoita, että seuraavat kaksi ehtoa voivat olla voimassa samanaikaisesti:

- (i) Jokainen on pelannut jonkin luvuista t_1, t_2, \dots, t_n määrän pelejä.
- (ii) Jokaista indeksia i , $1 \leq i \leq n$, kohti joku on pelannut täsmälleen t_i shakkipelejä.

Tehtävä 5. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Ei välttämättä erisuurten positiivisten kokonaislukujen n -tupla (a_1, a_2, \dots, a_n) on *kallis*, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku k , jolla

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

- a) Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla on olemassa kallis n -tupla.
- b) Osoita, että jokaista paritonta positiivista kokonaislukua m kohti on olemassa kokonaisluku $n \geq 2$, jolla m kuuluu kalliiseen n -tuplaan.

Yhtälön vasemmalla puolella on täsmälleen n tekijää.

Tehtävä 6. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka mitkään kaksi sivua eivät ole yhtä pitkät. Kolmion ABC painopisteen G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen O peilaukset sivujen BC , CA , AB suhteen ovat G_1, G_2, G_3 ja O_1, O_2, O_3 , vastaavasti. Osoita, että kolmioiden G_1G_2C , G_1G_3B , G_2G_3A , O_1O_2C , O_1O_3B , O_2O_3A ja ABC ympäri piirretyillä ympyröillä on yhteinen piste.

Kolmion painopiste on sen kolmen mediaanin leikkauspiste. Mediaani on jana, joka yhdistää kolmion kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen.