Zondag 9 april 2017

Opgave 4. Zij $n \geq 1$ een geheel getal en laat $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ positieve gehele getallen zijn. In een groep van $t_n + 1$ mensen worden wat potjes schaak gespeeld. Elke twee personen spelen hooguit één keer tegen elkaar. Bewijs dat het mogelijk is dat aan allebei de volgende voorwaarden tegelijk voldaan wordt:

(i) Voor elke persoon is het aantal potjes schaak dat hij of zij speelt, gelijk aan één van de getallen $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Voor elke i met $1 \leq i \leq n$ is er iemand die precies t_i potjes schaak speelt.

Opgave 5. Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Een n-tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ niet-noodzakelijk verschillende positieve gehele getallen heet *duur* als er een positief geheel getal k bestaat zodat

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Bepaal alle gehele getallen $n \geq 2$ waarvoor er een duur n-tal bestaat.

b) Bewijs dat er voor elk oneven positief geheel getal m een geheel getal $n \geq 2$ bestaat zodat er een duur n-tal is waar m in zit.

Het product aan de linkerkant bestaat uit precies n factoren.

Opgave 6. Zij ABC een scherphoekige driehoek waarin geen twee zijden even lang zijn. Laat G het zwaartepunt van de driehoek zijn en O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. De spiegelbeelden van G en O in zijden BC, CA, AB noemen we respectievelijk G_1, G_2, G_3 en O_1, O_2, O_3. Bewijs dat de omgeschreven cirkels van driehoeken G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A en ABC een gemeenschappelijk punt hebben.

Het zwaartepunt van een driehoek is het snijpunt van de drie zwaartelijnen. Een zwaartelijn is een lijn die door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde gaat.