EGMO 2017 Zürich

Language: **Czech**

Day: **2**

Neděle, 9. dubna, 2017

Úloha 4. Nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo a nechť $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ jsou kladná celá čísla. Ve skupině $t_n + 1$ lidí jsou hrány šachové partie. Dva lidé mohou sehrát partii nejvýše jednou. Dokažte, že je možné, aby platily zároveň tyto dvě podmínky:

(i) Počet her sehraných každou osobou je roven některému z čísel $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Pro každé i, $1 \leq i \leq n$, existuje některá z osob, která sehraje právě t_i her.

Úloha 5. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Uspořádaná n-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ne nutně různých kladných celých čísel se nazve *egmotická*, jestliže existuje kladné celé číslo k takové, že

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Určete všechna přirozená čísla $n \geq 2$, pro která existuje egmotická n-tice.

b) Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo m existuje přirozené číslo $n \geq 2$ takové, že m patří do egmotické n-tice.

V levé straně rovnosti výše je právě n činitelů.

Úloha 6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, jehož každé dvě strany mají různou délku. Obraz jeho těžiště G a středu O jeho kružnice opsané v osových souměrnostech podle stran BC, CA, AB označíme postupně G_1, G_2, G_3 a O_1, O_2, O_3. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A a ABC mají společný bod.