Неделя, 9 април, 2017

Задача 4. Дадено е цяло число $n \geq 1$ и естествени числа $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. В група от $t_n + 1$ човека се изиграват няколко партии шах. Двама човека от групата могат да изиграят помежду си най-много една партия. Да се докаже, че е възможно едновременно да бъдат изпълнени следните две условия:

(i) Броят на изиграните партии от всеки човек е равен на някое от числата $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) За всяко i, за което $1 \leq i \leq n$, съществува човек, който е изиграл точно t_i партии шах.

Задача 5. Дадено е цяло число $n \geq 2$. Една n-орка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ от не непременно различни естествени числа се нарича *скъпоценна*, ако съществува естествено число k, за което

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

а) Да се намерят всички цели числа $n \geq 2$, за които съществува скъпоценна n-орка.

б) Да се докаже, че за всяко нечетно естествено число m съществува цяло число $n \geq 2$, за което m принадлежи на скъпоценна n-орка.

В лявата страна на равенството има точно n множители.

Задача 6. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, в който няма равни страни. Симетричните точки на медицентъра G и на центъра на описаната окръжност O на ABC спрямо страните BC, CA, AB са означени съответно с G_1, G_2, G_3 и O_1, O_2, O_3. Да се докаже, че описаните окръжности около триъгълниците G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A и ABC се пресичат в една точка.

Медицентърът на триъгълник е пресечната точка на трите му медиани. Медианата е права, свързваща връх на триъгълника със средата на срещуположната страна.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки