Nedelja, 9.april, 2017

Zadatak 4. Neka je $n \geq 1$ cijeli broj i neka su $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ pozitivni cijeli brojevi. U grupi od $t_n + 1$ ljudi, odigrano je nekoliko šahovskih partija. Dva čovjeka mogu odigrati najviše jednu partiju. Dokazati da je moguće da oba sljedeća uslova budu istovremeno zadovoljena:

(i) Broj partija koju je odigrala svaka osoba je jedan od brojeva $t_1, t_2, \ldots, t_n$.
(ii) Za svako i , $1 \leq i \leq n$, postoji osoba koja je odigrala tačno t_i partija šaha.

Zadatak 5. Neka je $n \geq 2$ cijeli broj. Za n-torku $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ne obavezno različitih pozitivnih cijelih brojeva kažemo da je *interesantna*, ako postoji pozitivan cijeli broj k takav da vrijedi:

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Naći sve cijele brojeve $n \geq 2$ za koje postoji interesantna n-torka.

б) Dokazati da za svaki neparan pozitivan cijeli broj m, postoji cijeli broj $n \geq 2$, takav da m pripada nekoj ineteresantnoj n-torci.

Napomena: Na lijevoj strani jednakosti nalazi se tačno n činilaca.

Zadatak 6. Neka je ABC oštrougli trougao koji nema dvije stranice iste dužine. Tačke osnosimetrične težištu trougla G i centru opisanog kruga O ovog trougla u odnosu na stranice BC, CA i AB označimo sa G_1, G_2, G_3, i O_1, O_2, O_3, redom. Dokazati da krugovi opisani oko trouglova G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A i ABC imaju zajedničku tačku.

Napomena: Težište trougla je presječna tačka tri težišne linije. Težišna linija je duž koja spaja tjeme trougla sa sredinom naspramne stranice.

Language:Bosnian

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem vrijedi 7 bodova